

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ

2023/24 учебный год

10 класс

Решения и критерии проверки

Задача 1 (7 баллов). Решите уравнение: $\sqrt{4-2x} + \sqrt{2+x} = \sqrt{2x}$.

Ответ: $x = 2$.

Решение 1. Поскольку подкоренные выражения неотрицательны, можем записать, что $2x \geq 0$, $2+x \geq 0$ и $4-2x \geq 0$, то есть $0 \leq x \leq 2$. При таких значениях x выполняется неравенство $2+x \geq 2x$, и, в силу монотонности функции $f(x) = \sqrt{x}$ и неотрицательности первого слагаемого, получим, что $\sqrt{4-2x} + \sqrt{2+x} \geq \sqrt{2+x} \geq \sqrt{2x}$. Причём равенство возможно в том и только в том случае, когда $4-2x = 0$ и $2+x = 2x$, то есть при $x = 2$, и это значение подходит.

Решение 2. Как и в предыдущем решении, определим ОДЗ переменной x : $0 \leq x \leq 2$. При x , принадлежащих ОДЗ, возводим обе части уравнения в квадрат. После приведения подобных получим: $2\sqrt{(4-2x)(2+x)} = 3x - 6$. Поскольку левая часть неотрицательна, $3x - 6 \geq 0$, то есть $x \geq 2$. С учётом ОДЗ получаем, что единственный потенциально возможный корень — это $x = 2$. Осталось убедиться, что это значение действительно подходит.

Критерии проверки:

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

Не более 3 б. за задачу. Неверно определена ОДЗ переменной x или в принципе не учитываются ограничения на подкоренные выражения.

Не более 3 б. за задачу. При решении уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ сделан равносильный переход к уравнению $f(x) = g^2(x)$ без учёта условия $g(x) \geq 0$.

1 б. Только подобран верный ответ.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 2 (7 баллов). Все натуральные числа от 1 до 100 в некотором порядке выписываются по кругу. Назовём число *доминирующим*, если оно строго больше суммы двух своих соседей. Каково наибольшее возможное количество доминирующих чисел?

Решение. Докажем, что доминирующих чисел не больше, чем 50. Если число больше суммы двух своих соседей, то оно, в частности, больше каждого из них. Значит, если разбить все выписанные числа на пары соседних, в каждой паре может быть не больше одного доминирующего числа. Так как пар всего 50, то доминирующих чисел не может быть больше, чем 50.

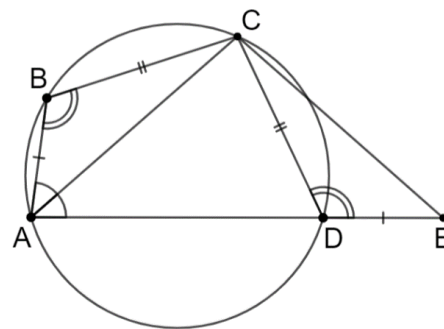
Теперь приведём пример расстановки, показывающий, что могло оказаться ровно 50 доминирующих чисел. Для этого расставим числа по кругу так: 1, 51, 2, 52, 3, 53, ..., 48, 98, 49, 99, 50, 100, после чего поменяем местами числа 99 и 100. Легко видеть, что доминирующими будут все числа от 51 до 100 — ровно 50 штук, то есть эта расстановка подходит.

Критерии проверки:

- 7 б. Приведено полное обоснованное решение.
- 3 б. Только доказано, что доминирующих чисел не может быть больше, чем 50.
- 3 б. Только приведён пример на 50 доминирующих чисел.
- 0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3 (7 баллов). Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла DAB . На продолжении AD за точку D выбрали такую точку E , что $AB = DE$. Докажите, что $AC = CE$.

Решение. Поскольку AC — биссектриса вписанного угла BAD , точка C — середина дуги BD , то есть $BC = DC$. Так как четырёхугольник $ABCD$ вписанный, $\angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle EDC$. Значит, треугольники ABC и EDC равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = ED$, $BC = DC$, $\angle ABC = \angle EDC$), а потому и третьи стороны у них равны, то есть $AC = CE$, что и требовалось доказать.



Критерии проверки:

- 7 б. Приведено полное обоснованное решение.
 - 2 б. В решении указано, что $\angle ABC = \angle EDC$ (факт можно использовать без доказательства).
 - 1 б. В решении указано, что $BC = DC$ (факт можно использовать без доказательства).
- (Последние два критерия складываются.)
- 0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 4 (7 баллов). Король загадал три попарно различных ненулевых числа a , b и c . Мудрец хочет записать эти числа (используя каждое ровно один раз) по одному вместо звёздочек в уравнение $* \cdot x^2 + 2 \cdot * \cdot x + * = 0$ так, чтобы у него получилось квадратное уравнение, имеющее хотя бы один действительный корень. Докажите, что он всегда сможет это сделать, причём как минимум двумя способами.

Решение. Рассмотрим три расстановки чисел, отличающиеся сдвигом по циклу: $(a; b; c)$, $(b; c; a)$, $(c; a; b)$. Предположим, что ни одно из соответствующих уравнений не имеет корней. Тогда дискриминанты этих уравнений отрицательны, то есть $b^2 < ac$, $c^2 < ab$ и $a^2 < bc$. По условию, числа ненулевые, поэтому левые части каждого неравенства положительны, значит, и правые тоже. Перемножив неравенства почленно, получим, что $a^2 b^2 c^2 < a^2 b^2 c^2$, — противоречие. Значит, хотя бы одна из этих трёх расстановок даёт уравнение, имеющее хотя бы один действительный корень. Поменяв первый и последний коэффициенты местами, получим другое уравнение, но с тем же дискриминантом, поэтому оно также будет иметь действительный корень.

Критерии проверки:

- 7 б. Приведено полное обоснованное решение.
- 4 б. Доказано, что необходимую расстановку всегда можно осуществить, но не доказано, что как минимум двумя способами.
- 0 б. Рассмотрен только частный случай значений задуманных чисел.
- 0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5 (7 баллов). Существует ли такое четырёхзначное число, что между его второй и третьей цифрами можно вписать некоторую цифру, отличную от нуля, и получить пятизначное число, кратное исходному?

Ответ: не существует.

Решение. Пусть наше четырёхзначное число $N = \overline{abde}$, а после вписывания цифры получили пятизначное число \overline{abcde} (здесь $a \neq 0$, $b, c \neq 0$, d, e — некоторые цифры). Заметим, что число $10N = \overline{abde0}$ точно делится на N . Значит, если \overline{abcde} кратно N , то и $\overline{abde0} - \overline{abcde} = (1000\overline{ab} + 10\overline{de}) - (1000\overline{ab} + 100c + \overline{de}) = 9\overline{de} - 100c$ кратно \overline{abde} . Отсюда либо $|9\overline{de} - 100c| \geq \overline{abde}$, либо $9\overline{de} - 100c = 0$. Однако $9\overline{de} - 100c \leq 9 \cdot 99 - 100 \cdot 0 = 891 < 1000 \leq \overline{abde}$ и $9\overline{de} - 100c \geq 9 \cdot 0 - 100 \cdot 9 = -900 > -1000 \geq -\overline{abde}$. Таким образом, неравенство $|9\overline{de} - 100c| \geq \overline{abde}$ выполняться не может, а потому $9\overline{de} - 100c = 0$, то есть $9\overline{de} = 100c$. Поскольку $c \neq 0$ по условию, а $100c$ кратно 9, то $c = 9$. В таком случае $\overline{de} = 100$, что невозможно.

Критерии проверки:

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

По –1 б. за каждую арифметическую ошибку, не повлиявшую на ход в целом верного решения.

5 б. Решение в целом верное, но из того, что $9\overline{de} - 100c$ кратно \overline{abde} , сделан неверный вывод о том, что $9\overline{de} - 100c \geq \overline{abde}$ (забыт модуль и/или случай равенства делимого нулю).

2 б. Приведено доказательство с использованием предположения, что после вписывания цифры обязательно получится число, большее исходного ровно в 10 раз.

1 б. Рассмотрено число $10N = \overline{abde0}$.

(Последние три критерия не складываются.)

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Максимальное количество баллов за олимпиаду — 35.