

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ  
ШКОЛЬНИКОВ  
ПО МАТЕМАТИКЕ

2023/24 учебный год

11 класс

Решения и критерии проверки

**Задача 1 (7 баллов).** В каждой клетке таблицы  $4 \times 4$  записано либо число 0, либо число 1. Вычисляют суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и двух больших диагоналях (состоящих из 4 клеток). Может ли быть так, что среди значений этих 10 сумм никакое не повторяется более двух раз?

**Ответ:** нет.

**Решение.** Предположим, что такое может быть. Всего возможных значений сумм пять: 0, 1, 2, 3, 4. Поскольку самих сумм 10, если каждое значение повторяется не более двух раз, все эти пять значений встретятся ровно по два раза. Рассмотрим ряд, сумма в котором равна 4. Понятно, что это не может быть диагональ, так как тогда во всех строках и столбцах суммы будут не меньше 1 и две суммы 0 получить не выйдет. Без умаления общности будем считать, что это некоторая строка. Тогда во всех столбцах и всех диагоналях суммы не меньше 1, а потому обе суммы 0 дают ещё две некоторые строки. Но тогда во всех столбцах и всех диагоналях суммы не превосходят 2, а потому и оставшуюся сумму 4, и две суммы по 3 должны давать строки, но на три этих суммы осталась только одна строка. Получили противоречие, значит, описанная в условии задачи расстановка чисел невозможна.

**Критерии проверки:**

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

2 б. Доказано, что сумма чисел на диагонали не может быть равна 4 (или аналогичное утверждение про сумму 0).

1 б. Доказано, что каждая сумма от 0 до 4 встретится ровно по два раза.  
(Последние два критерия складываются.)

0 б. Задача не решена или решена неверно.

**Задача 2 (7 баллов).** Решите уравнение:

$$\sin^2 x + \sqrt{x^2 - 16x + 64} + \sqrt{x^2 + 10x + 25} = 13.$$

**Ответ:**  $x \in \{-\pi, 0, \pi, 2\pi\}$ .

**Решение.** Заметим, что  $\sqrt{x^2 - 16x + 64} + \sqrt{x^2 + 10x + 25} = \sqrt{(x - 8)^2} + \sqrt{(x + 5)^2} = |x - 8| + |x + 5|$ . Раскрывая модули, получаем, что сумма этих модулей равна 13 при  $x \in [-5; 8]$ , равна  $-2x + 3 > 13$  при  $x \in (-\infty; -5)$  и равна  $2x - 3 > 13$  при  $x \in (8; +\infty)$ . Также при всех допустимых значениях  $x$  выполняется неравенство  $\sin^2 x \geq 0$ . Таким образом, левая часть исходного уравнения всегда не меньше 13, и равенство достигается в том и только в том случае, когда  $x \in [-5; 8]$  и  $\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k, \forall k \in \mathbb{Z}$ . Итак, осталось понять, сколько чисел вида  $\pi k$  для целых значений  $k$  находятся на отрезке  $[-5; 8]$ . Поскольку  $-2\pi < -5 < -\pi$  и  $2\pi < 8 < 3\pi$ , подходят только значения  $-\pi, 0, \pi$  и  $2\pi$ .

### Критерии проверки:

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

Не более 5 б. за задачу. Не проведён отбор корней простейшего тригонометрического уравнения на отрезке.

Не более 2 б. за задачу. В решении совершена ошибка вида  $\sqrt{a^2} = a$  (забыт модуль).

4 б. Простейшее тригонометрическое уравнение  $\sin x = 0$  решено неверно, но остальное решение верное, и правильно проведён отбор имеющихся корней на отрезке  $[-5; 8]$ .

3 б. Доказано, что  $\sin x = 0$ .

2 б. Уравнение сведено к виду  $\sin^2 x + |x - 8| + |x + 5| = 13$ .

1 б. Правильно решено простейшее тригонометрическое уравнение  $\sin x = 0$ . (Последние четыре критерия не складываются.)

0 б. Задача не решена или решена неверно.

**Задача 3 (7 баллов).** Натуральный делитель  $d$  натурального числа  $n$  назовём *значительным*, если  $\sqrt{n} < d < n$ . Какое наибольшее количество делителей (включая 1 и само себя) может иметь натуральное число, если у него ровно 7 значительных делителей?

**Ответ:** 17.

**Решение.** Как известно, если  $d$  — делитель натурального числа  $n$ , то  $d' = \frac{n}{d}$  — тоже натуральное число, причём также являющееся делителем числа  $n$ . Таким образом, все делители  $n$  разбиваются на пары, в каждой из которых их произведение равно  $n$  (кроме случая, когда  $\frac{n}{d} = d$ , то есть  $n$  — точный квадрат и  $d = \sqrt{n}$ ). Предположим, что у  $n$  есть делитель  $d$ , отличный от 1, самого числа  $n$  и числа  $\sqrt{n}$ . Тогда либо  $\sqrt{n} < d < n$ , то есть  $d$  — значительный, либо  $1 < d < \sqrt{n}$ , то есть парный для  $d$  делитель  $d'$  удовлетворяет двойному неравенству  $\sqrt{n} < d' = \frac{n}{d} < n$  и является значительным. Значит, делителей, отличных от 1,  $n$  и  $\sqrt{n}$ , у

$n$  может быть не более чем 14. Вместе с 1,  $n$  и  $\sqrt{n}$  получается не более чем 17 делителей (при этом, если их ровно 17, то  $n$  — точный квадрат).

В качестве примера числа, имеющего 17 делителей, подойдёт  $n = 2^{16}$ . Его делители — это  $1, 2^1, 2^2, \dots, 2^{16}$ , из которых значительными являются  $2^9, 2^{10}, \dots, 2^{15}$ , то есть ровно 7 штук.

### Критерии проверки:

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

5 б. Оценка на 17 сделана верно, но не обосновано, что ровно 17 делителей достигается.

3 б. Не учтено, что  $n$  может быть точным квадратом (тогда не все делители разбиваются на пары), но в остальном решение верное, дан ответ 16.

2 б. Присутствует идея разбиения делителей на пары, дающие в произведении  $n$ .

2 б. Приведён подходящий пример на 17.

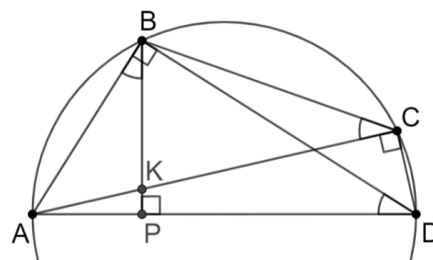
(Последние два критерия складываются.)

0 б. Задача не решена или решена неверно.

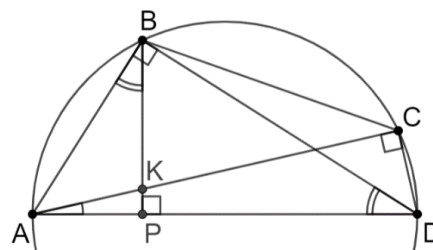
**Задача 4 (7 баллов).** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  известно, что  $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ . Пусть перпендикуляр к  $AD$ , проведённый из точки  $B$ , пересекает отрезок  $AC$  в точке  $K$ . Найдите длину отрезка  $KC$ , если  $AB = 7$ ,  $AK = 2$ .

**Ответ:** 22,5.

**Решение 1.** Поскольку  $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ , четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность с диаметром  $AD$ . Тогда  $\angle ACB = \angle ADB$  как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Кроме того,  $\angle ABP = 90^\circ - \angle PBD = \angle ADB$ , откуда  $\angle ABP = \angle ACB$ . Это означает, что треугольники  $ABK$  и  $ACB$ , имеющие общий угол  $CAB$ , подобны (по двум углам). Следовательно,  $\frac{AK}{AB} = \frac{AB}{AC}$ , откуда  $AC = \frac{AB^2}{AK} = \frac{7^2}{2} = 24,5$  и  $KC = AC - AK = 24,5 - 2 = 22,5$ .



**Решение 2.** Обозначим  $\angle DAC = \alpha$ ,  $\angle BDA = \beta$ . Как и в прошлом решении, заметим, что четырёхугольник  $ABCD$  — вписанный и  $\angle ABP = \angle ADB = \beta$ . Далее,  $AP = AB \sin \beta = AK \cos \alpha$ , то есть  $7 \sin \beta = 2 \cos \alpha \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \frac{7}{2}$ . Также  $AD = \frac{AB}{\sin \beta} = \frac{AC}{\cos \alpha}$ , то



есть  $AC = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} AB = \frac{7}{2} AB = \frac{7}{2} \cdot 7 = 24,5$ , и тогда  $KC = AC - AK = 24,5 - 2 = 22,5$ .

**Комментарий.** Задачу можно решить, используя понятие степени точки относительно окружности. Свойства степени точки считаются общеизвестными, участники олимпиады могут использовать их без доказательства.

### Критерии проверки:

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

По –1 б. за каждую арифметическую ошибку при сохранении логики верного решения.

3 б. Записано равенство отношений соответственных сторон в треугольниках  $ABK$  и  $ACB$ .

2 б. Показано, что  $\angle ABP = \angle ACB$ .

1 б. Сделано наблюдение о том, что четырёхугольник  $ABCD$  — вписанный. (Последние три критерия не складываются.)

0 б. Не доведённое до конца счётное решение с помощью координат.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

**Задача 5 (7 баллов).** Докажите, что графики функций  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$  и  $g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 2$  пересекаются в трёх различных точках, причём эти точки лежат на одной прямой.

**Решение.** Сначала докажем, что графики этих функций пересекаются в трёх различных точках. Для этого нужно проверить, что уравнение  $f(x) = g(x)$  имеет три различных корня. Уравнение  $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 2$  равносильно  $x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$ . Заметим, что в левой части этого уравнения находится кубический многочлен  $h(x)$  с положительным старшим коэффициентом, поэтому при всех достаточно больших положительных  $x$  его значение будет положительным, а при всех достаточно больших по модулю отрицательных  $x$  — отрицательным. При этом  $h(-1) = 1$  и  $h(0) = -1$ . Значит, уравнение  $h(x) = 0$ , в силу непрерывности функции  $h(x)$  и теоремы о промежуточном значении, имеет как минимум по одному корню на интервалах  $(-\infty; -1)$ ;  $(-1; 0)$ ;  $(0; +\infty)$ . Кубический многочлен не может иметь больше трёх корней, откуда заключаем, что уравнение  $f(x) = g(x)$  действительно имеет ровно три различных корня, то есть графики соответствующих функций пересекаются ровно в трёх различных точках.

Теперь докажем, что эти точки пересечения лежат на одной прямой. Из

системы  $\begin{cases} y = x^3 + 2x^2 - 2x - 1 \\ y = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 2 \end{cases}$  следует, что  $y = 2y - y = 2(x^3 + 2x^2 - 2x - 1) -$

$(2x^3 + 4x^2 - 3x - 2) = -x$ . Таким образом, любое решение этой системы  $(x_0; y_0)$ , соответствующее некоторой точке пересечения графиков функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , удовлетворяет также и уравнению-следствию  $y = -x$ . То есть все точки пересечения этих графиков лежат на одной прямой, задаваемой уравнением  $y = -x$ , что и требовалось доказать.

**Комментарий 1.** Доказать, что уравнение  $h(x) = 0$  имеет три различных корня, также можно и с помощью производной.

**Комментарий 2.** Участники олимпиады, знакомые с формулой Кардано для решения кубических уравнений в общем виде, могут попытаться вычислить координаты точек пересечения графиков непосредственно, после чего проверить принадлежность этих точек одной прямой. Однако такой путь решения очень трудоёмкий и не представляется рациональным.

**Критерии проверки:**

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

По  $-1$  б. за каждую арифметическую ошибку, не повлиявшую на ход в целом верного решения.

3 б. Доказан только факт пересечения графиков в трёх точках ИЛИ доказана только принадлежность всех точек пересечения графиков одной прямой.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

**Максимальное количество баллов за олимпиаду — 35.**