

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ

2023/24 учебный год

7 класс

Решения и критерии проверки

Задача 1 (7 баллов). Натуральное число x составляет r процентов от натурального числа y , при этом число r также равно произведению x и y . Чему может быть равно y ?

Ответ: $y = 10$.

Решение. По условию, $r = \frac{x}{y} \cdot 100 = xy$. Значит, $100x = xy^2$, и, поскольку $x \neq 0$, получаем, что $y^2 = 100$, то есть $y = 10$. В качестве x при этом подойдёт любое натуральное число.

Критерии проверки:

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

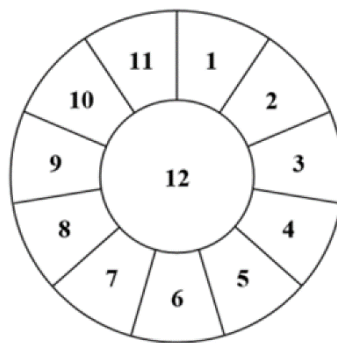
1 б. Верно составлено только одно из двух уравнений.

1 б. Приведён только верный ответ без пояснений.

(Последние два критерия не складываются.)

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 2 (7 баллов). Можно ли, используя 3 цвета, закрасить все 12 областей на этом рисунке таким образом, чтобы никакие две области, граничащие между собой по стороне, не были покрашены одинаково? (Каждая область целиком красится в один цвет.)



Ответ: нет.

Решение. Предположим, что это можно сделать. Заметим, что центральная область граничит со всеми остальными, поэтому все области, кроме центральной, могут быть покрашены только в один из двух цветов (отличных от того, в который покрашена центральная). Значит, цвета областей 1–11 должны чередоваться по кругу. Но чередование по кругу возможно только при чётном количестве объектов, поэтому среди областей 1–11 обязательно найдутся соседние по стороне, покрашенные в один цвет. Получили

противоречие, следовательно, наше предположение неверно, то есть покрасить все 12 областей требуемым образом невозможно.

Критерии проверки:

- 7 б. Приведено полное обоснованное решение.
- 2 б. В каком-либо виде присутствует идея использовать нечётность количества областей на границе.
- 1 б. Отмечено, что для покраски областей 1–11 должны быть использованы только два цвета.
(Последние два критерия складываются.)
- 0 б. Приведён только ответ «нет» без пояснений.
- 0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3 (7 баллов). Можно ли в каждой клетке таблицы 8×8 записать 0 или 1 таким образом, чтобы суммы чисел в строках были равны 0, 1, 2, 2, 2, 5, 6, 8 (в любом порядке), а в столбцах — 0, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6 (также в любом порядке)?

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что такое возможно. Заметим, что среди сумм в столбцах есть число 0. Это значит, что есть некоторый столбец, полностью заполненный нулями. Он пересекается с каждой строкой, поэтому в каждой строке есть хотя бы один 0. Другими словами, сумма чисел в каждой строке не превосходит 7. Но, по условию, есть строка с суммой 8. Получили противоречие, следовательно, наше предположение неверно, и требуемая расстановка чисел невозможна.

Критерии проверки:

- 7 б. Приведено полное обоснованное решение.
- 2 б. Отмечено, что в каждой строке (или столбце) есть хотя бы один 0.
- 0 б. Приведён только ответ «нет» без пояснений.
- 0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 4 (7 баллов). Первоклассник складывает цифры из спичек, как показано на рисунке, а из цифр составляет числа. Например, для составления числа 2023 требуется 21 спичка. Какое наименьшее натуральное число он может составить, используя ровно 50 спичек, если все 50 спичек необходимо использовать?



Ответ: 10888888.

Решение. Понятно, что это число подходит. Докажем, что оно наименьшее из возможных. Для составления цифры 1 требуется 2 спички, для цифры 7 — 3 спички, для цифры 4 — 4 спички, для цифр 2, 3, 5 — 5 спичек, для цифр 0, 6, 9 — 6 спичек, для цифры 8 — 7 спичек. Значит, число, сложенное из 50 спичек, не может состоять менее чем из 8 цифр. Если можно составить восьмизначное число, которое меньше, чем 10888888, то оно также начинается с цифр 1 и 0. Но тогда на оставшиеся 6 цифр приходится ровно 42 спички, и единственный вариант это осуществить — использовать только цифры 8, а тогда как раз получится 10888888. Значит, это число действительно наименьшее.

Критерии проверки:

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

1 б. Показано, что это число точно будет содержать не меньше 8 цифр.

1 б. Для каждой цифры правильно посчитано, сколько спичек нужно для её составления.

2 б. Приведён верный ответ.

(Последние три критерия складываются.)

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5 (7 баллов). В классе учатся 25 человек, причём среди них есть и мальчики, и девочки. Каждый мальчик сказал: «У меня друг на одну больше, чем друзей-мальчиков». Каждая девочка сказала: «У меня друзей-мальчиков на одного больше, чем друг». Докажите, что чья-то дружба не взаимна.

Решение. Предположим, что все дружба взаимны. Нарисуем граф (схему), в которой мальчики и девочки — это вершины (точки на плоскости), а дружба — рёбра (линии, соединяющие соответствующие точки). Из условия следует, что степень каждой вершины нечётна (степенью вершины называется общее количество выходящих из неё рёбер). Но тогда вершин не может быть нечётное количество, так как сумма степеней всех вершин — это удвоенное количество рёбер. Однако учеников в классе 25 — противоречие. Следовательно, чья-то дружба не взаимна, что и требовалось доказать.

Комментарий. Решение задачи можно сократить, сразу сославшись на известное утверждение — теорему о чётности числа нечётных вершин в графе. Его можно применять без доказательства.

Критерии проверки:

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

2 б. Сделано наблюдение о том, что общее количество друзей у каждого ученика является нечётным.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Максимальное количество баллов за олимпиаду — 35.