

**МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ**

2023/24 учебный год

8 класс

Решения и критерии проверки

Задача 1 (7 баллов). Что больше:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \text{ или}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \frac{7}{8} + \frac{8}{9} - \frac{9}{10} + \frac{10}{11} - \frac{11}{12}?$$

Ответ: значение первого выражения больше.

Решение. Заметим, что $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{11 \cdot 12} > 0$, однако $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{6}{7} - \frac{7}{8}\right) + \left(\frac{8}{9} - \frac{9}{10}\right) + \left(\frac{10}{11} - \frac{11}{12}\right) = -\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6} - \frac{1}{7 \cdot 8} - \frac{1}{9 \cdot 10} - \frac{1}{11 \cdot 12} < 0$. Поскольку любое положительное число больше любого отрицательного, можно сразу утверждать, что первая величина больше второй.

Критерии проверки:

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

2 б. Сделана попытка непосредственного вычисления значений выражений путём приведения к общему знаменателю, и только одно из двух значений вычислено верно.

0 б. Сделана попытка непосредственного вычисления значений выражений путём приведения к общему знаменателю, и оба значения вычислены неверно.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 2 (7 баллов). Ненулевые числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2 + bc = b^2 + ca = c^2 + ab$. Обязательно ли все три числа равны между собой?

Ответ: да.

Решение. Вычтем из первого выражения второе. Получим $a^2 + bc - b^2 - ca = (a - b)(a + b) - c(a - b) = (a - b)(a + b - c) = 0$. Значит, либо $a = b$, либо $a + b = c$. В

первом случае, подставив $a = b$ в исходное условие, имеем $a^2 + ac = c^2 + a^2$, то есть $c(c - a) = 0$. Поскольку $c \neq 0$, получаем, что $a = b = c$ (и все такие тройки, очевидно, подходят). Во втором случае, подставив $c = a + b$ в исходное условие, имеем $a^2 + b(a + b) = (a + b)^2 + ab$. После раскрытия скобок и приведения подобных получим $2ab = 0$, то есть среди чисел a и b есть 0, что невозможно по условию. Значит, все три числа a, b, c действительно равны между собой.

Критерии проверки:

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

Не более 3 б. за задачу. Упущен случай равенства одной неизвестной сумме двух других.

0 б. Только показано, что при $a = b = c$ условие выполняется.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3 (7 баллов). В клетки квадрата 10×10 расставили натуральные числа от 1 до 100, используя каждое число ровно один раз. Назовём клетку *тяжёлой*, если во всех клетках, соседних с ней по стороне, записаны числа меньшие, чем в этой клетке. Какое наибольшее количество тяжёлых клеток может быть на доске?

Ответ. 50.

Решение. Разобьём доску на «доминошки» (прямоугольники 1×2), очевидно, это можно сделать. Заметим, что в каждом прямоугольнике не может быть более одной тяжёлой клетки. Поскольку прямоугольников $\frac{100}{2} = 50$, на доске не более 50 тяжёлых клеток.

Приведём пример, когда тяжёлых клеток ровно 50. Для этого покрасим все клетки доски в шахматном порядке, во все чёрные клетки поставим числа от 51 до 100, а во все белые — числа от 1 до 50 (и те, и другие — в произвольном порядке). Поскольку каждая клетка граничит по стороне только с клетками цвета, отличного от её, а каждое число в чёрной клетке больше каждого числа в белой, то все чёрные клетки (которых 50 штук) будут тяжёлыми.

Критерии проверки:

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

3 б. Только доказано, что тяжёлых клеток не больше, чем 50.

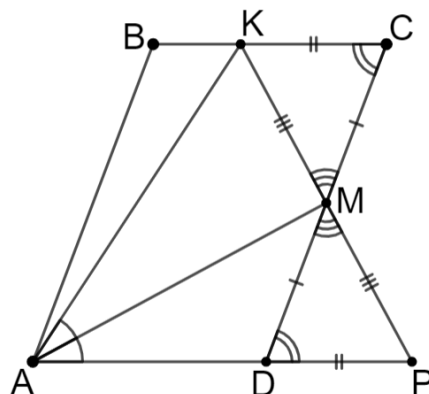
3 б. Только приведён пример, когда тяжёлых клеток ровно 50.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 4 (7 баллов). На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена такая точка K , что $BK = 3$, $CK = 5$. Известно, что середина M стороны CD лежит на биссектрисе угла DAK . Найдите длину отрезка AK .

Ответ: 13.

Решение. Продлим KM до пересечения с прямой AD в точке P . Углы KCM и PDM равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD , углы CMK и DMP равны как вертикальные, а также $CM = DM$, так как M — середина стороны CD по условию. Значит, треугольники CKM и DPM равны по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, равны их соответственные стороны, то есть $KM = PM$ и $CK = DP$. Первое равенство означает, что отрезок AM является медианой в треугольнике AKP . Но по условию AM — биссектриса угла DAK . Таким образом, в треугольнике AKP отрезок AM одновременно является и медианой, и биссектрисой, то есть этот треугольник равнобедренный, $AK = AP$. Осталось заметить, что $AD = BC$ как противоположные стороны параллелограмма, и поэтому $AK = AP = AD + DP = BC + DP = BC + CK = (BK + CK) + CK = BK + 2CK = 3 + 2 \cdot 5 = 13$.



Критерии проверки:

- 7 б. Приведено полное обоснованное решение.
- 2 б. Доказано, что $AK = AP$.
- 1 б. Доказано, что $DKCP$ — параллелограмм.
- 1 б. Сделано дополнительное построение: KM продлено до пересечения с AD (или, наоборот, на расстояние, равное KM).
- 1 б. Дан верный ответ.
- (Последние четыре критерия складываются.)
- 0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5 (7 баллов). Натуральное число при делении на все чётные числа от 2 до 2024 даёт попарно различные остатки, причём оно является наименьшим числом с таким свойством. Какой остаток может давать это число при делении на 2024?

Ответ: 2022.

Решение. Назовём натуральное число, дающее при делении на все чётные числа от 2 до 2024 попарно различные остатки, хорошим. Если существует нечётное хорошее число, при делении на чётные числа оно может давать

только нечётные остатки, то есть не меньшие 1. Уменьшив это число на 1, мы получим чётное (очевидно, также натуральное) число, меньшее исходного, все остатки при делении которого на числа 2, 4, ..., 2024 уменьшатся на 1 и также будут различными. Таким образом, для любого хорошего нечётного числа найдётся меньшее его хорошее чётное число, поэтому наименьшим хорошим числом может быть только чётное. При делении на чётные числа чётное число может давать только чётные остатки, а остаток всегда меньше числа, на которое делят, поэтому хорошее чётное число при делении на 2, 4, ..., 2024 может давать только остатки из множества 0, 2, ..., 2022. Поскольку в этом множестве 1012 чисел (столько же, сколько и в множестве 2, 4, ..., 2024), то все эти остатки встретятся ровно по одному разу. Значит, остаток наименьшего хорошего числа при делении на 2 может быть равен только 0, при делении на 4 — только 2, и так далее, то есть при делении на 2024 он может быть равен только 2022.

Комментарий. От участников олимпиады не требуется доказывать, что числа с указанным свойством существуют. Находить наименьшее такое число также не требуется.

Критерии проверки:

- 7 б. Приведено полное обоснованное решение.
- 3 б. Только доказано, что наименьшее хорошее число обязательно является чётным.
- 2 б. Только доказано, что у чётного хорошего числа искомый остаток равен 2022.
- 1 б. Дан только верный ответ без каких-либо пояснений.
- 0 б. Задача не решена или решена неверно.

Максимальное количество баллов за олимпиаду — 35.