

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ

2023/24 учебный год

9 класс

Решения и критерии проверки

Задача 1 (7 баллов). При каких значениях a уравнение $x^2 - a^2x + 3a = 0$ имеет два различных действительных корня, сумма которых равна 4?

Ответ: $a = -2$.

Решение. По теореме Виета, сумма корней указанного квадратного уравнения равна a^2 . Значит, $a^2 = 4$, то есть $a = 2$ или $a = -2$. В первом случае дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 - a^2x + 3a$ равен $D = a^4 - 12a = 16 - 24 = -8 < 0$, то есть указанное уравнение корней не имеет. Во втором случае $D = a^4 - 12a = 16 + 24 = 40 > 0$, то есть уравнение действительно имеет два различных действительных корня. Таким образом, подходит только значение $a = -2$.

Критерии проверки:

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

4 б. Логика решения верная, но неверный ответ получен из-за арифметической ошибки (например, в обоих случаях дискриминант получился положительным).

3 б. При решении уравнения $a^2 = 4$ найдены значения $a = 2$ и $a = -2$, но не проверено, действительно ли уравнение имеет при таких a два различных корня.

2 б. При решении уравнения $a^2 = 4$ найдено только значение $a = 2$ и не проверено, что уравнение при таком a действительно имеет два различных корня.

1 б. Верно выражена сумма корней уравнения через его коэффициенты по теореме Виета.

1 б. Только дан верный ответ, и он проверен (решено соответствующее квадратное уравнение или посчитан дискриминант).

(Последние пять критериев не складываются.)

0 б. Дан только ответ без каких-либо пояснений.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 2 (7 баллов). Можно ли на доску 8×8 поставить 16 королей так, чтобы они не били друг друга и чтобы при этом в каждой строке и в каждом столбце находилось ровно по 2 короля? (Король бьёт все клетки, соседние с его клеткой по стороне или углу.)

Ответ: да.

Решение. На рисунке приведён пример, показывающий, что это сделать можно.

	К		К				
					К		К
	К		К				
					К		К
К		К					
				К		К	
К		К					
				К		К	

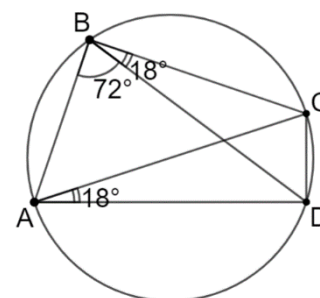
Критерии проверки:

- 7 б. Приведено полное обоснованное решение.
- 0 б. Только дан ответ «да» без примера расстановки.
- 0 б. Любые попытки доказать, что требуемая расстановка невозможна.
- 0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3 (7 баллов). Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $\angle ABD = 72^\circ$, $\angle DAC = 18^\circ$, $AC = 12$. Найдите радиус окружности.

Ответ: 6.

Решение. Углы DAC и DBC равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Значит, $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \angle ABD + \angle DAC = 72^\circ + 18^\circ = 90^\circ$. Поскольку в окружности вписанный угол в 90° опирается на диаметр, хорда AC является диаметром окружности. Тогда радиус окружности равен половине диаметра, то есть $\frac{AC}{2} = \frac{12}{2} = 6$.



Критерии проверки:

- 7 б. Приведено полное обоснованное решение.
 - 5 б. Сделан вывод о том, что AC — диаметр окружности.
 - 3 б. Замечено, что $\angle ABC = 90^\circ$.
 - 1 б. Показано, что $\angle DAC = \angle DBC$.
- (Последние три критерия не складываются.)
- 0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 4 (7 баллов). В классе учатся 25 человек, причём среди них есть и мальчики, и девочки. Каждый мальчик сказал: «У меня друг на одну больше, чем друзей-мальчиков». Каждая девочка сказала: «У меня друзей-мальчиков на одного больше, чем друг». Докажите, что чья-то дружба не взаимна.

Решение. Предположим, что все дружбы взаимны. Нарисуем граф (схему), в которой мальчики и девочки — это вершины (точки на плоскости), а дружбы — рёбра (линии, соединяющие соответствующие точки). Из условия следует, что степень каждой вершины нечётна (степенью вершины называется общее количество выходящих из неё рёбер). Но тогда вершин не может быть нечётное количество, так как сумма степеней всех вершин — это удвоенное количество рёбер. Однако учеников в классе 25 — противоречие. Следовательно, чья-то дружба не взаимна, что и требовалось доказать.

Комментарий. Решение задачи можно сократить, сразу сославшись на известное утверждение — теорему о чётности числа нечётных вершин в графе. Его можно применять без доказательства.

Критерии проверки:

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

2 б. Сделано наблюдение о том, что общее количество друзей у каждого ученика является нечётным.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5 (7 баллов). Прямоугольный параллелепипед с целыми размерами $a \times b \times c$ построен из единичных кубиков. Каждый кубик покрашен в зелёный, синий или красный цвет. Каждый из a слоёв размера $1 \times b \times c$, параллельных грани $b \times c$, содержит ровно 9 зелёных кубиков, 12 синих и сколько-то красных. Каждый из b слоёв размера $a \times 1 \times c$, параллельных грани $a \times c$, содержит ровно 20 синих кубиков, 25 красных и сколько-то зелёных. Докажите, что объём этого параллелепипеда не меньше, чем 180.

Решение. Подсчитаем количество синих кубиков в параллелепипеде двумя способами. Если считать по слоям $1 \times b \times c$, таких кубиков $12a$, а если считать по слоям $a \times 1 \times c$, таких кубиков $20b$. Таким образом, $12a = 20b \Leftrightarrow 3a = 5b$. Поскольку a, b, c — натуральные числа, а 3 и 5 взаимно просты, отсюда следует, что a кратно 5, то есть $a = 5t$ для некоторого натурального t . Тогда $15t = 5b$, то есть $b = 3t$. Теперь подсчитаем количество зелёных кубиков. Если считать по слоям $1 \times b \times c$, таких кубиков $9a$, а если считать по слоям $a \times 1 \times c$, таких кубиков $abc - 20b - 25b = abc - 45b$. Таким образом, $9a = abc - 45b$. Подставляя $a = 5t$, $b = 3t$ в это уравнение, получим, что $9 \cdot 5t = 5t \cdot 3t \cdot c - 45 \cdot 3t \Leftrightarrow 180t = 15t^2c \Leftrightarrow tc = 12$. Таким образом, объём параллелепипеда $V = abc = 3t \cdot 5t \cdot c = 15t \cdot tc = 15t \cdot 12 = 180t$. Поскольку $t \geq 1$, отсюда получаем, что $V = 180t \geq 180$, что и требовалось доказать.

Критерии проверки:

- 7 б. Приведено полное обоснованное решение.
- 6 б. Доказано, что объём делится на 180, но из этого не сделан никакой вывод о величине объёма.
- 1 б. Верно составлено уравнение для зелёных или красных кубиков.
- 1 б. Уравнение $12a = 20b$ решено в целых числах в общем виде.
- 1 б. Получено уравнение $12a = 20b$ для синих кубиков.
(Последние три критерия складываются.)
- 0 б. Задача не решена или решена неверно.

Максимальное количество баллов за олимпиаду — 35.